Polynômes factoriels

On note $\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}$ algèbre des polynômes réels en l'indéterminée X.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur à n.
Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

Partie I

1.a Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

1.b On suppose que P est un polynôme constant, préciser $\Delta(P)$.
On suppose que $\deg P \geq 1$, déterminer $\deg(\Delta(P))$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Δ_n la restriction de Δ au départ de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.a Justifier que Δ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.b Déterminer le noyau de Δ_n.

2.c Déterminer le rang puis l'image de Δ_n.

3.a Déduire de la question précédente que l'endomorphisme Δ est surjectif.

3.b Justifier : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \exists! Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta(Q) = P$ et $Q(0) = 0$.
On définit alors une application $\nabla : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ en posant $\nabla(P) = Q$.

Rq : Le symbole ∇ se lit « nabla »

3.c Montrer que ∇ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3.d Observer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{p} P(i) = \nabla(P)(p+1)$

Partie II

On pose :

$$P_0 = 1,\ P_1 = X,\ P_2 = \frac{X(X-1)}{2!}, \ldots,\ P_m = \frac{X(X-1)\ldots(X-m+1)}{m!} = \frac{1}{m!}\prod_{k=0}^{m-1}(X-k) \text{ pour } m \in \mathbb{N}.$$

On définit par récurrence Δ^k pour $k \in \mathbb{N}$, en posant $\Delta^0 = Id$ puis pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^{k+1} = \Delta \circ \Delta^k$.

1.a Calculer $\Delta(P_0)$ et $\Delta(P_m)$ en fonction de P_{m-1} pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

1.b Pour $k, m \in \mathbb{N}$. Exprimer $\Delta^k(P_m)$ selon que $k \leq m$ ou $k > m$.

1.c Enfin, exprimer $\Delta^k(P_m)(0)$ en discutant selon les valeurs de $k, m \in \mathbb{N}$.

2.a Justifier que la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.b En déduire que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{m=0}^{n} \Delta^m(P)(0) P_m$.

2.c Exprimer alors $\nabla(P)$ en fonction des $\Delta^m(P)(0)$ et des P_m.

3. Application :

3.a Déterminer, sous forme factorisée $\nabla(X^3)$.

3.b En déduire l'expression de $\sum_{i=0}^{m} i^3$.